

EL METODO DE NEWTON-RAPHSON - LA ALTERNATIVA DEL INGENIERO PARA RESOLVER SISTEMAS DE ECUACIONES NO LINEALES

RESUMEN

Este artículo describe una metodología en el método de Newton-Raphson para resolver sistemas de n ecuaciones no lineales en n variables. Al final se presentan tres ejemplos que ilustran la aplicación del método.

PALABRAS CLAVES: Newton-Raphson, ecuaciones no lineales

ABSTRACT

This article describes one methodology in the method of Newton-Raphson to resolve systems of n not linear equations in n variables. In the end three examples appear that illustrate the application of method.

KEYWORDS: Newton-Raphson, not linear equations.

JUÁN EDUARDO BRAVO BOLÍVAR

Lic. En Física y Matemáticas
Profesor Auxiliar
Universidad Tecnológica de Pereira
jubravo@utp.edu.co

ALBERTO J. BOTERO ARANGO

Ingeniero Industrial U.T.P.
Profesor Transitorio T.C.
Facultad Ingeniería Industrial

MARCELA BOTERO ARBELÁEZ

Ingeniera Electricista U.T.P.
Instrumentación Física, Ms.C
Profesor Transitorio T.C.
Facultad de Ciencias Básicas

1. INTRODUCCIÓN

La mayoría de los textos de análisis numérico en el estudio de sistemas de ecuaciones no lineales sólo hace un tratamiento para dos variables y se evita el caso de más de dos variables para la deducción del método. Presentamos una alternativa metodológica y pedagógica para hacer menos difícil la comprensión de éste. La metodología es un resultado de la experiencia docente.

2. EL MÉTODO DE NEWTON – RAPHSON PARA UNA ECUACIÓN NO LINEAL EN UNA VARIABLE

Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathfrak{R}$, $f \in C^2[a, b]$ y x_k una estimación del cero de f en $[a, b]$.

2.1 Deducción del Método

Considere: $\Delta y_k = f'(x_k) \cdot \Delta x_k$, con Δx_k apropiado. $y_k = f(x_k)$ y además, $\Delta y_k = f(x_{k+1}) - f(x_k)$.

Si x_k es una aproximación de la solución de $f(x) = 0$ en $[a, b]$ y x_{k+1} es mejor aproximación, $f(x_{k+1}) \approx 0$, entonces:

$$\Delta y_k = -f(x_k) \quad \text{y} \quad -f(x_k) = f'(x_k) \cdot \Delta x_k$$

así se obtiene

$$\Delta x_k = -[f'(x_k)]^{-1} \cdot f(x_k)$$

con $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$.

2.2 Análisis de error en el método

El método de Newton-Raphson es convergente cuadráticamente [1]. Esto es, el error es proporcional al cuadrado del error anterior, dado por

$$e_{k+1} = -\frac{f''(x_r)}{f'(x_r)} e_k^2$$

con x_r entre x_k y x_{k+1} .

2.3 Desventajas del método

Aunque el método de Newton-Raphson en general es muy eficiente, hay situaciones en que presenta dificultades. Un caso especial es en el de las raíces múltiples. En algunos casos es posible que para raíces simples se presenten dificultades por su lenta convergencia.

3. EL MÉTODO DE NEWTON – RAPHSON PARA SISTEMAS DE ECUACIONES NO LINEALES

Sea $F: \Omega \subset \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$ un campo vectorial. Y las coordenadas de F , $f_i: \Omega \subset \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ con $i=1, 2, \dots, n$ campos escalares. Además, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$.

3.1 Deducción del método

La diferencial total para un campo escalar f_i esta dado por:

$$df_i(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} dx_n$$

en otra forma,

$$df_i(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$df_i(x) = \nabla f_i(x) \cdot dx$$

Podemos aproximar $df_i(x^{(k)})$ con $\Delta x^{(k)}$ apropiado, con lo anterior obtenemos:

$$\Delta f_i(x^{(k)}) = \nabla f_i(x^{(k)}) \cdot \Delta x^{(k)}$$

Si se tiene un sistema de n ecuaciones con n incógnitas,

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 0 \\ f_2(x) &= 0 \\ &\dots \\ f_n(x) &= 0 \end{aligned}$$

este sistema se puede interpretar como el cero de un campo vectorial F ,

$$F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \dots \\ f_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

Para resolver el problema, considere $x^{(k)}$ y $x^{(k+1)}$ dos estimaciones de la solución de $F(x)=0$. En donde $x^{(k+1)}$ es la mejor estimación. Ahora considere el incremento de F para $x=x^{(k)}$:

$$\Delta F(x^{(k)}) = F(x^{(k+1)}) - F(x^{(k)})$$

$$\Delta F(x^{(k)}) = \begin{pmatrix} f_1(x^{(k+1)}) \\ f_2(x^{(k+1)}) \\ \dots \\ f_n(x^{(k+1)}) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f_1(x^{(k)}) \\ f_2(x^{(k)}) \\ \dots \\ f_n(x^{(k)}) \end{pmatrix}$$

$$\Delta F(x^{(k)}) = \begin{pmatrix} f_1(x^{(k+1)}) - f_1(x^{(k)}) \\ f_2(x^{(k+1)}) - f_2(x^{(k)}) \\ \dots \\ f_n(x^{(k+1)}) - f_n(x^{(k)}) \end{pmatrix}$$

$$\Delta F(x^{(k)}) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(x^{(k)}) \cdot \Delta x^{(k)} \\ \nabla f_2(x^{(k)}) \cdot \Delta x^{(k)} \\ \dots \\ \nabla f_n(x^{(k)}) \cdot \Delta x^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla f_1(x^{(k)}) \\ \nabla f_2(x^{(k)}) \\ \dots \\ \nabla f_n(x^{(k)}) \end{pmatrix} \cdot \Delta x^{(k)}$$

$$J(x^{(k)}) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(x^{(k)}) \\ \nabla f_2(x^{(k)}) \\ \dots \\ \nabla f_n(x^{(k)}) \end{pmatrix}$$

En donde J es la matriz jacobiana (un arreglo de gradientes de los campos escalares f_i , con $i=1,2, \dots,n$) del campo vectorial F . Además, podemos hacer $F(x^{(k+1)}) \approx 0$ por ser $x^{(k+1)}$ la mejor estimación del cero de F . Entonces,

$$\Delta F(x^{(k)}) = -F(x^{(k)})$$

$$-F(x^{(k)}) = J(x^{(k)}) \cdot \Delta x^{(k)}$$

y por consiguiente obtenemos:

$$\Delta x^{(k)} = -[J(x^{(k)})]^{-1} \cdot F(x^{(k)})$$

siempre que $J(x^{(k)})$ sea no singular. Finalmente,

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta x^{(k)}$$

3.2 Orden de convergencia

El uso de métodos de iteración funcional con sistemas de ecuaciones son completamente diferentes de aquellos para ecuaciones simples. Se observa que es útil frecuentemente una información a priori sobre la localización de la raíz; cuando esto no es posible podemos usar un método siempre convergente para obtener una buena aproximación de esta. Por lo tanto, en este caso estamos interesados principalmente en la eficiencia del método. La convergencia en sistema de ecuaciones es un problema importancia, que usualmente quedaremos satisfechos con cualquier orden de convergencia, únicamente si el método es convergente. Frecuentemente, si la aproximación lineal no está completamente cercana a la solución, la iteración no será convergente. La forma del error aclararía mas el concepto anterior [7].

3.3 Algoritmo del método de Newton para sistemas

Para aproximar la solución del sistema de ecuaciones no lineales, en la forma $F(x) = 0$, es necesario tener una aproximación inicial a la solución.

1. Dada una aproximación inicial $x^{(0)}$,

2. Calcular:

$$\Delta x^{(k)} = -[J(x^{(k)})]^{-1} \cdot F(x^{(k)}),$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta x^{(k)}$$

para $k=0,1,2, \dots,N$

4. ALGUNAS APLICACIONES DEL MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

Son muy variadas las aplicaciones del método de Newton. Este método se puede usar para aproximar las soluciones complejas de una ecuación polinomial de grado $n \geq 2$. Otra aplicación para destacar está en la solución de problemas de flujos de potencia en ingeniería eléctrica. También se encuentran aplicaciones mecánicas en la solución de ecuaciones que determinan la posición en la dinámica de un mecanismo o sistema.

4.1 Raíces Reales y Complejas de una Ecuación Polinomial.

Dada la ecuación $z^3-3=0$, donde $z \in C$. Encuentre todas las soluciones de la ecuación.

Para resolver la ecuación hacemos $z=x+y \cdot i$, con $i^2=-1$, obteniendo:

$$(x+y \cdot i)^3-3=0$$

Resolviendo el producto notable y agrupando términos se obtiene

$$(x^3-3xy^2-3)+(3x^2y-y^2) \cdot i=0$$

Haciendo $r=(x,y)^t$ con $P(x,y)=x^3-3xy^2-3$ y $Q(x,y)=3x^2y-y^2$, se tiene que

$$F(r)=\begin{pmatrix} P(r) \\ Q(r) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}=0$$

Con la matriz jacobiana

$$J(r)=\begin{pmatrix} 3x^2-3y^2 & -6xy \\ 6xy & 3x^2-3y^2 \end{pmatrix}$$

Si $r^{(0)}=(1.5,0)^t$, y aplicando el algoritmo, este se detiene en $N=4$ y la raíz real es la parte real del vector $r^{(4)}=(1.44224957,0)^t$; $z_1=1.44224957$.

Con $r^{(0)}=(-0.5,1.0)^t$, el algoritmo se detiene en $N=5$, y la solución es dada por $r^{(5)}=(-0.2112479,1.24902477)^t$, en donde $z_{2,3}=-0.72112479 \pm 1.24902477$ raíces complejas conjugadas.

4.1 El Problema del Flujo de Potencia.

El problema consiste en determinar la magnitud y el ángulo del voltaje en cada barra de la red de potencia, que se muestra en la figura 1, bajo las condiciones especificadas.

Datos de línea: $Y_{12}=4-5j$ pu, $Y_{23}=4-10j$ pu.
 $\theta_1=0$, $V_1=1.0$ pu, $V_2=1.0$ pu.

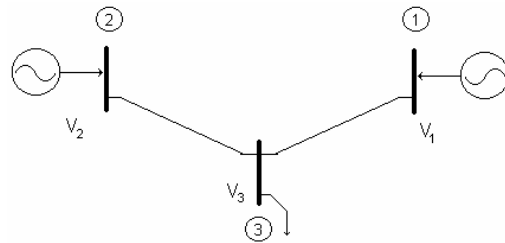


Figura 1. Sistema formado por tres barras

NODO	TIPO	Pi (pu)	Qi (pu)
1	SLACK	-	-
2	GENERACION	1.70	-
3	CARGA	-2.00	-1.00

Tabla 1. Datos del sistema de tres barras.

Las ecuaciones para establecer el balance de potencia nodal están dadas por:

$$\Delta P_2 = -2,3 + 4V_3 \cos \theta_{23} - 10V_3 \sin \theta_{23} = 0$$

$$\Delta P_3 = -2,0 - 8V_3^2 + 4V_3 \cos \theta_{32} - 10V_3 \sin \theta_{32} + 4V_3 \cos \theta_{31} - 5V_3 \sin \theta_{31} = 0$$

$$\Delta Q_3 = -1,0 - 15V_3^2 + 4V_3 \sin \theta_{32} + 10V_3 \cos \theta_{32} + 4V_3 \sin \theta_{31} + 5V_3 \cos \theta_{31} = 0$$

en donde $\theta_{km}=\theta_k-\theta_m$, $r=(\theta_2, \theta_3, V_3)^t$ y

$$F(r)=\begin{pmatrix} \Delta P_2 \\ \Delta P_3 \\ \Delta Q_3 \end{pmatrix}$$

$$J(r)=\begin{pmatrix} \frac{\partial \Delta P_2}{\partial \theta_2} & \frac{\partial \Delta P_2}{\partial \theta_3} & \frac{\partial \Delta P_2}{\partial V_3} \\ \frac{\partial \Delta P_3}{\partial \theta_2} & \frac{\partial \Delta P_3}{\partial \theta_3} & \frac{\partial \Delta P_3}{\partial V_3} \\ \frac{\partial \Delta Q_3}{\partial \theta_2} & \frac{\partial \Delta Q_3}{\partial \theta_3} & \frac{\partial \Delta Q_3}{\partial V_3} \end{pmatrix}$$

Aplicando el algoritmo del método de Newton con $r^{(0)}=(0.1,0.1,1.0)^t$, se obtiene en la quinta iteración la solución del problema:

$$r^{(5)}=(0.13497080,-0.00094814,0.88186783)^t$$

4.3 Aplicación a un Canal de Descarga de Flujo.

Para calcular la forma de un canal de descarga de flujo gravitacional que minimice el tiempo de tránsito de partículas granulares descargadas, C. Chiarella, W. Charlton, y A. W. Roberts [2] resolvieron las siguientes ecuaciones por el método de Newton:

$$(i) f_n(\theta_1, \dots, \theta_N) = \frac{\text{sen } \theta_{n+1}}{v_{n+1}} (1 - \mu \omega_{n+1}) - \frac{\text{sen } \theta_n}{v_n} (1 - \mu \omega_n) = 0$$

$$(ii) f_N(\theta_1, \dots, \theta_N) = \Delta y \sum_{i=1}^N \tan \theta_i - X = 0$$

$$(a) v_n^2 = v_0^2 + 2gn\Delta y - 2\mu\Delta y \sum_{j=1}^n \frac{1}{\cos \theta_j}$$

$$(b) \omega_n = -\Delta y v_n \sum_{i=1}^N \frac{1}{v_i^3 \cos \theta_i}$$

Para cada n=1,2, ...,N.

La constante v_0 es la velocidad inicial del material granular, X es la coordenada x del final del canal, μ es la fuerza de fricción, N es el número de segmentos del canal y g es la constante gravitacional. La variable θ_i es el ángulo del i-ésimo segmento del canal a partir de la vertical como se muestra en la figura 2 y v_i es la velocidad de las partículas en el i-ésimo segmento del canal. Resuelva (i) y (ii) para $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_N)^t$ con $\mu=0$, $X=2$, $\Delta y=0.2$, $N=4$, $v_0=0$ y $g=32.2$ pies/seg², donde los valores para v_n y ω_n pueden obtenerse directamente de (a) y (b). Iterar hasta que $\|\theta^{(j)} - \theta^{(j-1)}\|_\infty < 10^{-2}$.

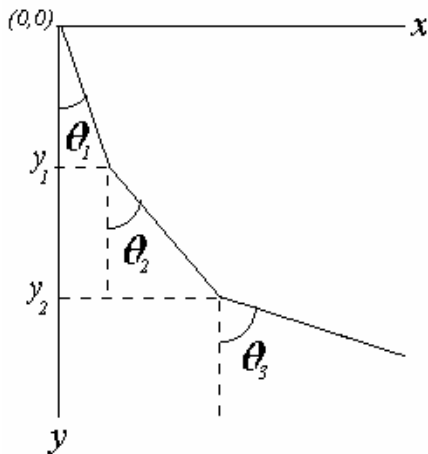


Figura 2. Canal de descarga

Con $r=(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)^t$, y

$$f_1(r) = \frac{\text{sen } \theta_2}{5.08} - \frac{\text{sen } \theta_1}{3.59}$$

$$f_2(r) = \frac{\text{sen } \theta_3}{6.22} - \frac{\text{sen } \theta_2}{5.08}$$

$$f_3(r) = \frac{\text{sen } \theta_4}{7.18} - \frac{\text{sen } \theta_3}{6.22}$$

$$f_4(r) = 0, 2(\tan \theta_1 + \tan \theta_2 + \tan \theta_3 + \tan \theta_4) - 2$$

$$F(r) = \begin{pmatrix} f_1(r) \\ f_2(r) \\ f_3(r) \\ f_4(r) \end{pmatrix}$$

$$J(r) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \theta_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta_2} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta_3} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta_4} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \theta_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \theta_2} & \frac{\partial f_2}{\partial \theta_3} & \frac{\partial f_2}{\partial \theta_4} \\ \frac{\partial f_3}{\partial \theta_1} & \frac{\partial f_3}{\partial \theta_2} & \frac{\partial f_3}{\partial \theta_3} & \frac{\partial f_3}{\partial \theta_4} \\ \frac{\partial f_4}{\partial \theta_1} & \frac{\partial f_4}{\partial \theta_2} & \frac{\partial f_4}{\partial \theta_3} & \frac{\partial f_4}{\partial \theta_4} \end{pmatrix}$$

Para $r^{(0)}=(1,-1,1,-1)^t$, el método de newton converge para N=5 y produce

$$r^{(5)} = \begin{pmatrix} 0.51748398 \\ 0.77541715 \\ 1.02961840 \\ 1.42484470 \end{pmatrix}$$

5. CONCLUSIONES

El método de newton es eficiente en la solución de sistemas de ecuaciones no lineales, converge muy rápidamente y proporciona una muy buena precisión en los resultados. El método se emplea en la solución de problemas académicos y en problemas propios del mundo real.

6. BIBLIOGRAFÍA

[1] BURDEN and FAIRES. Análisis Numérico, Grupo Editorial Iberoamérica., 1985.

[2] CHIARELLA, C., W. Charlton, and A. W. Roberts (1975). Optimum chute profiles in gravity flow of granular materials: A discrete segment solution method. Transactions of the ASME, Journal of Engineering for Industry, Series B, 97, 10-13.

[3] COHEN A.M. Análisis Numérico. Editorial Reverté, S.A., 1977.

[4] DORN William and MC CRACKEN Daniel. Numerical Methods whit Fortran IV Case Studies. Canadá: Jhon Wiley & Sons, Inc, 1972.

[5] FROBERG Carl-Erik Introduction to Numerical Analysis. Second Edition Addison-Wesley, 1970.

[6] GALLEGO R. Ramón A. y ROMERO L. Rubén A. Flujos de Carga en Redes de Energía, 1999. Editorial McGraw-Hill, 1996.

[7] GRAINGER John J. and STEVENSON Jr. William D. Análisis de Sistemas de Potencia. Editorial McGraw-Hill, 1996.

[8] RALSTON Anthony. Introducción al Análisis Numérico. Mexico: Editorial Limusa, 1978.